CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

Séminaire VACHES : théorème de Torelli

Énoncé : C, C' courbes projectives lisses de genre $g \geq 2$ sur un corps $k = \bar{k}$
Si $\exists$ v : $\mathrm{Jac}\, C \xrightarrow{\sim} \mathrm{Jac}\, C'$ de v.a.p.p. alors $\exists !\, u : C' \xrightarrow{\sim} C$ tq
$v = \pm u^*$.

Rq et conséquences : [Milne] (lectures on Jacobians) : C non hyperelliptique $\Rightarrow$ le signe est unique
C hyperelliptique $\Rightarrow$ $\pm$ arbitraire.

$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Jac}\, C, j) \simeq \mathrm{Aut}(C)$ si C hyp.
$\simeq \mathrm{Aut}(C) \times \{\pm 1\}$ sinon

[Milne] : k parfait, $C, C'/k$ et $(\mathrm{Jac}\, C, j) \underset{/k}{\xrightarrow{\sim}} (\mathrm{Jac}\, C', j')$ alors $C \simeq_k C'$

Obstruction de Serre : si $(A, a) \simeq_{\bar{k}} (\mathrm{Jac}\, C, j)$ avec $(A, a)/k$ alors
si C est hyperelliptique $\exists\, C_0/k$ tq $(A, a) \simeq_k (\mathrm{Jac}\, C_0, j_0)$
si C est non hyperelliptique il peut y avoir une obstruction.

Élargissements : [Andreotti] (On a th of Torelli) $\mathrm{Sym}^{g-1} C$ birationnellement eq à $\mathrm{Sym}^{g-1} C' \Rightarrow C \simeq C'$
[Beauville] (le pb de Torelli) X variété kählérienne compacte de dim n
$H^n(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^n(X', \mathbb{Z})$ un isomorphisme qui respecte les structures de Hodge
$\overset{?}{\Rightarrow} X \simeq X'$

- le cas $n = 1$ $\quad H^1(X, \mathbb{Z}) \subset H^1(X, \mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$
  la donnée de la jacobienne $\Leftrightarrow H^{0,1} / H^1(C, \mathbb{Z})$
  la polarisation $\Leftrightarrow$ cup produit qui définit "isométrie"
- hypersurface cubique de $\mathbb{P}^4$
- $\cap$ de 2 quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+3}$
- surfaces K_3, surfaces d'Enriques.

[Oort-Steenbrink] (The local Torelli problem for algebraic curves)
coarse-moduli space $M_g \longrightarrow A_g$ is injective and an immersion in car
counterexample in car 2 au moins

champs $M_g \longrightarrow A_g$ est une immersion ramifiée sur le lieu hyperelliptique

- liens avec le pb de Schottky de caractériser l'image.

www.crm.umontreal.ca

Esquisse de la preuve de Weil par [Debarre] (ou la démo de A. Weil du th de Torelli par les courbes) → valable sur $\mathbb{C}$ (uniquement à cause du th de la position uniforme)

$$\Theta = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Sym}^{g-1}(C) \hookrightarrow \mathrm{Pic}^{g-1}(C))$$

- $g=2$ trivial car la polarisation $= \Theta = C$.
- On suppose $g \geq 3$ alors c'est une conséquence du th. suivant.

$\cancel{\Theta = \mathrm{Im}(\mathrm{Sym}^{g-1}(C) \hookrightarrow \mathrm{Pic}^{g-1}(C))}$

Prop : $a \in \mathrm{Jac}(C)\setminus\{0\}$, $\Theta_a = \Theta + a$ alors $\Theta \cdot \Theta_a$ est intègre sauf si

(1) $a \sim p - q$, $p, q \in C$

(2) $\exists\ \pi : C \xrightarrow[2:1]{} E$ tq $a = \pi^* e$ et E elliptique.

Rq : $D \in \Theta \cdot \Theta{+}a \iff$ $D \sim$ à un diviseur effectif de dg $g-1$
$D - a \sim$ " "

Supposons $a \sim p - q$ alors si D est effectif et $p \in \mathrm{Supp}\, D$, $D - a = D + q - p$ est effectif.

On note $W^n_\alpha = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Sym}^n C \hookrightarrow \mathrm{Pic}^n C) + \alpha \subset \mathrm{Pic}^{n+\deg \alpha} C$.

Alors $\{x_1 + \dots + x_{g-2} + p\} = W_p^{g-2} \subset \Theta \cdot \Theta_a$.

$D \in \Theta \overset{RR}{\iff} K_C - D \in \Theta$ donc $\{K_C - x_1 - \dots - x_{g-2} - q\} = (K_C - W^{g-2})_{-q} \subset \Theta \cdot \Theta_a$.

$D + a \in \Theta \iff K_C + a - D \in \Theta$
$\quad\quad\quad\quad = K_C - D + p - q$

Ce sont 2 composantes irréductibles (confondues si C hyperelliptique et $p = \bar{q}$)
On peut montrer que ce sont les seules.

Ingrédients de la proposition : $|K_C + a|$ a un point base p ssi $h^0(K_C + a) = h^0(K_C + a - p)$
$= g - 1$

$\overset{R.R}{\iff} h^0(p - a) = 1 \iff \exists\, q$ tq $a \sim p - q$.

On suppose donc qu'on n'est pas dans ce cas là.

$$\phi : \Theta \cap \Theta_a \dashrightarrow |K + a| = \mathbb{P}^{g-2}$$
$$D \mapsto D + D' \text{ avec } D' \in |K - D + a|$$

avec $l(D) = 1 = l(D - a)$
hypothèse générique

Lem : ϕ est dominante pour chaque composante et $\Theta \cdot \Theta_a$ est réduit.

Ingrédients : $\left\{ \begin{array}{l} \dim \Theta_{sing} \leq g-3 \\ \text{application de Gauss} \end{array} \right.$ $T_D \Theta \leadsto D + D' \in |K| \simeq \mathbb{P}T_D^*(\mathrm{Jac}\, C)$

On peut donc décrire $\Theta \cap \Theta_a$ géométriquement.

$$\mathrm{Sym}^{g-1} C \twoheadrightarrow \Theta$$

$\overline{W} = \{x_1 + \dots + x_{g-1} /$ $\longrightarrow \Theta \cap \Theta_a$

$\underbrace{h^0(K + a - x_1 - \dots - x_{g-1}) \neq 0\}}$.

$\Updownarrow$

$\varphi(x_1) \dots \varphi(x_{g-1})$ sont sur un hyperplan où $\varphi : C \longrightarrow |K_C + a| \simeq \mathbb{P}^{g-2}$.

$\varphi(C) = C'$

Etude de φ : $(2g-2) = (\deg \varphi) \deg C'$ Par RR $\deg C' \geq g-2$.

Possibilités : φ est birationnel alors th de la position uniforme $\Rightarrow \overline{W}$ a une seule composante.

: φ est de deg 2. $\rightsquigarrow a \sim \varphi^* e$ avec e sur une c.e donc C est reglé

: $g = 4$ et φ deg 3 $\Rightarrow \overline{W}$ a une seule composante aussi.

: $g = 3$

Démo de Torelli $Z_C = \{a / \Theta \cdot \Theta_a$ non intègre$\}$. c'est une déf intrinsèque qui dépend seulement de Θ

donc $v(Z_C) = Z_{C'}$

Par la proposition $Z_C = \underbrace{C - C}_{\dim 2} \cup \underbrace{\text{possibles courbes elliptiques venant des } a = \pi^* e}_{\dim 1}$

donc $v(C - C) = C' - C'$

Soit $D \in \mathrm{Sym}^{g-1} C$ tq $h^0(D) = 1$ et $\Theta_D = \{x \in \mathrm{Jac}\, C / h^0(D + x) > 0\}$

Si $D \sim x_1 + \dots + x_{g-1}$ et $K - D \sim y_1 + \dots + y_{g-1}$ alors

$\Theta_D \cap C - C = \bigcup (C - x_i) \cup (y_i - C)$

$\supset$ clair

$\subset$ si $\sum x_i + p - q \sim D' \geq 0$ et q n'est pas un des x_i alors

$\sum x_i + p \sim D' + q$ diviseurs distincts et $h^0(D + p) \geq 2$ donc

$K \sim D_0 + D + p$ avec $D_0 \geq 0$ donc $K - D = y_1 + \dots + y_{g-1} \sim D_0 + p$

et comme $l(K - D) = 1$ $p \in \{y_1, \dots, y_{g-1}\}$.

donc $\exists\ x \in C$ et $x' \in C'$ tq $v(C-x) = \pm (C'-x')$

<u>Rq</u> cas $g=3$
construction trigonale de Donagi

$\Theta \cap \Theta_a$ est une courbe de genre 7 pour a générique.

$$\begin{tikzcd} & & \Theta \cap \Theta_a \arrow[d, "2:1"] \\ C \arrow[dr, "4:1"'] & & X \arrow[dl, "3:1"] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

$D \to K+a-D$

courbe de $g=4$ non hyperelliptique

Assez explicite si a de 2-torsion.

Autres preuves:

[Matsusaka] (On a theorem of Torelli) étend Torelli en toute caract. (vieux langage)

[Andreotti] beaucoup de rappels de géométrie des courbes / valable en toute caractéristique

[Arbarello Cornalba Griffiths Harris] f : $x_1 + \dots + x_{g-1} \in \mathrm{Sym}^{g-1}(C) \longrightarrow \left(\det |\omega_i(x_j)|_{i \in \{1,\dots,g\}} : \dots\dots \right) \in \mathbb{P}^{g-1}$

<u>Prop</u> : si C est non hyperelliptique, le lieu de branchement D de f est irréductible et un point de D est l'hyperplan tangent à la courbe canonique C $\Rightarrow$ On utilise alors que la courbe duale est birationnelle à C. (en car. 0)

Ciliberto (On a proof of Torelli's theorem)
Collino (A simple proof of the theorem of Torelli based on Torelli's approach) } court, valable en toute caractéristique mais pas très engageant.

Saint-Donat C non hyperelliptique $/\mathbb{C}$, H un hyperplan
$$H \cap C = p_1 + \dots + p_{2g-2} \text{ donc}$$
$$A = p_1 + \dots + p_{g-1} = K_C - (p_g + \dots + p_{2g-2})$$
donc $W^{g-1} - A$ admet 2 représentations paramétriques (<u>ie</u> doublement de translation au voisinage de 0) :
$$\sum_{i=1}^{g-1} f_{ji}(z_i) = \sum_{i=g}^{2g-2} f_{ji}(z_i) \quad \text{pour } 1 \le j \le g$$

Génériquement $z_i \longrightarrow (f'_{1i}(z_i), f'_{2i}(z_i) \dots, f'_{gi}(z_i))$ paramétrent les branches de C

Rq : [Mumford] (Red book) : Θ doublement de translation $\Longleftrightarrow$ (A, Θ) est la jac d'une courbe non hyperellip

[Green] (Quadrics of rank 4 in the ideal of a canonical curve) C non hyperelliptique

$$\{\text{points doubles de } \Theta\} \xrightarrow{\delta} \mathbb{P}(S^2 H^0(C, K_C))$$

$x \longrightarrow$ le cône tangent $\subset$ { espace des quadriques de $\mathbb{P}(H^0(C, K$

Riemann : ~~Pk~~ le plongement canonique de $C \subseteq \operatorname{Im} \delta$

Green : $\operatorname{Im} \delta$ contient toutes quadriques coupant ~~[illegible]~~ fi de C

$\Rightarrow$ th de Torelli provient alors d'un résultat de Saint-Donat qui montre que l'intersection des quadriques est C sauf si { C est une quintique plane lisse $(g=$; C est trigonale.

[Marten] (A new proof of Torelli's theorem) reprise dans [Milne]

- complètement élémentaire, valable en toute caractéristique
- seul ingrédient en plus de R.R le th de Riemann sur l'intersection de W^1 avec W_a^{g-1}
- pas très éclairante et non constructive car procède par contradiction